

**ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОИДА НА ПОДРУЧЈУ РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ ПРИМЈЕНОМ
ГЛОБАЛНОГ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНОГ МОДЕЛА EGM2008****Дејан Васић¹, Славко Васиљевић¹ и Драгољуб Секуловић²**¹Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет, Универзитет у Бањој Луци, Република Српска²Универзитет одбране – Војна академија, Београд, Република Србија

Сажетак: Концепт геоида је од великог значаја у геодезији и геонаукама уопште. Као еквипотенцијална површ, геоид има фундаментални значај у дефинисању појмова хоризонталног и вертикалног. У пракси се користи као референтна површ за неколико система висина, за проучавање унутрашње грађе Земље и за позиционирање. У зависности од расположивих података, данас је могуће прецизно одређивање геоида како у приобалним, тако и у континенталним подручјима. У раду је обрађен проблем одређивања ундулације геоида, са практичним примјером одређивања на подручју Бања Луке и сјеверозападног дијела Републике Српске.

Кључне ријечи: еквипотенцијална површ, геоид, ундулација геоида, глобални геопотенцијални модел.

Original scientific paper

**GEOID DETERMINATION IN THE REPUBLIC OF SRPSKA BY USING
GLOBAL GEOPOTENTIAL MODEL EGM2008****Dejan Vasić¹, Slavko Vasiljević¹ and Dragoljub Sekulović²**¹Faculty of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, University of Banja Luka, Republika Srpska²University of Defence – Military Academy, Belgrade, Republic of Serbia

Abstract: The concept of the geoid is of great importance in geodesy and in geosciences generally. As an equipotential surface, the geoid is fundamental in defining the terms of the horizontal and vertical. In praxis, it is used as a reference surface for several height systems, for studying the Earth's internal structure and positioning. Depending on the available data, it is possible to accurately determine the geoid in coastal as well as in continental areas. In this paper the problem of determining the geoid undulations is discussed, with a practical example of determining in the area of Banja Luka and the northwestern part of the Republic of Srpska.

Key words: equipotential surface, geoid, geoid undulation, global geopotential model.

УВОД

Еквипотенцијална површ силе теже која се на мору поклапа са идеално мирним нивоом мора а на копну пролази испод површи Земље, и која најбоље апроксимира облик и величину Земље, назива се геоидом. С обзиром да се може дефинисати као математички облик Земље, геоид представља кључну површ у геодезији с нарочито важном улогом у позиционирању. Површ коју би водена површина океана заузела под утицајем само

INTRODUCTION

The geoid is a gravity equipotential surface, which at sea coincides with perfect calm level of the sea and on mainland goes underneath the continents, and it is the best approximation of the Earth in terms of size and shape. Considering that it can be defined as the mathematical figure of the Earth, the geoid is a key surface in geodesy with a particularly important role in positioning. Water surface of the ocean formed under the influence of gravity only, without

силе теже, без других утицаја, предложена је као површ којом се дефинише облик Земље од стране Гауса (Carl Friedrich Gauss), а сам назив „геоид“ накнадно је увео Листинг (Johann Benedict Listing) (Одаловић, 2010). Све тачке на површи геоида имају исти скаларни потенцијал, тј. између њих нема разлике у потенцијалној енергији. Геоид посједује и сва остала својства еквипотенцијалне површи. Као такав користи се као референтна површ, односно датум за неколико система висина (Делчев, 2009). Из дефиниције геоида слиједи принцип позиционирања датума вертикалних геодетских мрежа. На морској обали примјеном мареографа одређује се средњи ниво мора, на начин да се у мањој или већој мјери елиминишу и моделују сви утицаји који доприносе да у природи не постоји идеално мирна морска површина: таласи, морске струје, температура и салинитет воде, утицај Сунца и Мјесеца, утицај Земље као тијела. Ова мареографска мјерења дециметарске су тачности. Такође, геоид заузима одређен положај и испод Земљине копнене масе. Одређивање геоида на континенталном подручју захтијева примјену другачијих техника. Наиме, геоид је глатка али и неправилна површ која не представља вјерну слику физичке површи Земље. Да би се утврдио његов положај на копну потребна су гравиметријска мјерења и сложен математички апарат којим се прикупљени подаци обрађују, као и увођење додатних апроксимација. Осим великог значаја у геодетској теорији и пракси, геоид се користи и у другим научним дисциплинама као што су океанографија и геофизика (Yang et al, 2004).

Иако готово два вијека представља важан концепт у геонаукама, прецизна одређивања геоида успјешно су извршена тек у последњих неколико деценија. На подручју Републике Српске, и уопште Босне и Херцеговине, геоид је одређиван за вријеме Социјалистичке Федеративне Републике Југославије (СФРЈ). Ово одређивање је првенствено вршено за потребе успостављања тригонометријске мреже првог реда, а компоненте геоида односиле су се на локални (референт) елипсоид, који није

any other influence, is proposed as a surface which defines the shape of the Earth by Gauss (Carl Friedrich Gauss), and the name of the "geoid" was subsequently introduced by Listing (Johann Benedict Listing) (Odalović, 2010). All points on the geoid surface have the same scalar potential, i.e. there are no differences in the potential energy between points. Geoid also has all the other characteristics of equipotential surfaces. As such it is used as a reference surface (datum) for several height systems (Delčev, 2009). From the geoid definition follows the principle of positioning the datum of geodetic vertical networks. On the coast the mean sea level is determined by using the tide gauge (mareograph), through elimination and modeling of all the influences which make the existence of perfect calm sea surface impossible: waves, ocean currents, temperature and salinity of the water, the influence of the Sun and Moon, the influence of the Earth's body. The accuracy of this mareographic measurements is about decimeter. Also, the geoid has a certain position and underneath the Earth's land masses. Geoid determination at continental area requires the use of different techniques. *Videlicet*, the geoid is smooth and irregular surface which does not represent a true shape of Earth's physical surface. To determine its position on the mainland, gravimetric measurements and usage of complex mathematical operations for processing the collected data are required, and also the introduction of additional approximations is required. Besides the great importance in geodetic theory and praxis, the geoid is also used in other disciplines such as oceanography and geophysics (Yang et al, 2004).

Although nearly two centuries is an important concept in the geosciences, the precise geoid determination are successfully performed only in the last few decades. On the territory of the Republic of Srpska, and Bosnia and Herzegovina generally, the geoid was determined during the Socialist Federal Republic of Yugoslavia (SFRY). This determination was primarily made for the purpose of establishing first-order triangulation network, and components of the geoid referred

геоцентричан. Прецизно одређивање геоида високе резолуције у односу на општи Земљин елипсоид тек треба да се изврши. У том смислу, неопходна је примјена геопотенцијалних модела за одређивање дугопериодичних компоненти геоида. Такође, током октобра 2013. године извршена су гравиметријска мјерења апсолутних вриједности убрзања силе Земљине теже у склопу CILAP (Капацитети за унапређење земљишне администрације и процедура) пројекта, којег спроводи шведски Lantmaeteriet у сарадњи са геодетским управама Републике Српске и Федерације БиХ (<http://www.cilap-project.org/Default.aspx>). Теренска мјерења вршена су на тачкама у манастиру Гомионица код Бања Луке, манастиру Тавна код Бијељине, као и у Сарајеву и Мостару. Резултати су обрађени у Шведској. Током 2014. године вршена су и допунска релативна гравиметријска мјерења (у РС обављена од 01. 09. до 30. 09.) на укупно 60 мјерних станица, неопходна првенствено за рачунање параметара за трансформацију у нови референтни систем, али и за одређивање средњоталасних компоненти геоида, а све у циљу одређивања прецизног геоида за Босну и Херцеговину.

КОМПОНЕНТЕ ГЕОИДА

Земља се у првој апроксимацији може представити сфером, али с обзиром на то да је реална Земља спљоштена на половима, најједноставније геометријско тијело које довољно добро апроксимира њен општи облик јесте двоосни обртни елипсоид (Vaniček, Krakiwsky, 2005). Исти елипсоид може се употребити и за апроксимацију силе Земљине теже, ако испуњава следеће услове:

- Обртни елипсоид треба бити геоцентричан, односно његов геометријски центар мора се поклапати са центром масе Земље;
- Мала оса обртног елипсоида треба да се подудара са средњом осом ротације Земље, а

to the local (reference) ellipsoid, which is not geocentric. Precise determination of high resolution geoid relative to the Earth's global ellipsoid still needs to be done. In this regard, the usage of geopotential models is necessary for determination of long-wave geoid components. As a part of CILAP project (Capacity to Improve Land Administration and Procedures), in October 2013. gravimetric measurements of the absolute values of the gravity acceleration were made. This project is implemented by the Swedish Lantmaeteriet in cooperation with the Geodetic Administrations of the Republic of Srpska and the Federation of Bosnia and Herzegovina (<http://www.cilap-project.org/Default.aspx>). Field measurements were carried out at points in Gomionica monastery near Banja Luka, the monastery Tavna near Bijeljina and Sarajevo and Mostar. Results were processed in Sweden. During 2014. additional relative gravimetric measurements were performed (in Republic of Srpska performed from 01. 09. to 30. 09.) at 60 measuring stations. These measurements are primarily required to calculate the parameters for the transformation to the new reference system, but also to determine medium-wave geoid components, with the final aim of determining the precise geoid for Bosnia and Herzegovina.

COMPONENTS OF THE GEOID

In a first approximation, Earth can be represented by a sphere, but considering that the real Earth is flattened at the poles, the simplest mathematical regular body that represents a fairly good geometric approximation of the general shape of the Earth is oblate ellipsoid of revolution, which can be Earth's global ellipsoid or so-called reference ellipsoid (Vaniček, P., Krakiwsky, E., 2005). The same ellipsoid can be used to approximate the gravity force, if it meets the following requirements:

- Oblate ellipsoid of revolution has to be geocentric, apropos its geometric center must coincide with the Earth's center of mass;

за сам елипсоид сматра се да око своје мале осе ротира угаоном брзином једнаком угаоној брзини ротације Земље;

- Запремина обртног елипсоида треба бити једнака запремини Земље – овај критеријум је испуњен ако елипсоид најбоље апроксимира геоид у смислу методе најмањих квадрата;

- Маса обртног елипсоида треба бити једнака маси Земље, укључујући и атмосферу, а распоред густине масе унутар елипсоида је правилан.

Обртни елипсоид који испуњава наведене захтјеве назива се еквипотенцијалним елипсоидом, а поље теже које генерише назива се нормалним пољем силе теже. Иако Земља није прави елипсоид, поље теже елипсоида има фундаментални практични значај јер је једноставно за рачунање, а одступања стварног поља теже од елипсоидног „нормалног“ поља довољно су мала да се могу сматрати линеарним. Ово раздвајање Земљиног поља теже на „нормално“ и преостало „поремећајно“ поље значајно поједностављује проблем његовог одређивања. Због претпостављеног правилног распореда густине маса унутар еквипотенцијалног елипсоида нормално поље теже је такође правилно и може се математички описати на прилично једноставан начин. Осим тога, површ еквипотенцијалног елипсоида је еквипотенцијална површ нормалног потенцијала који се означава са U , а сама вриједност на елипсоиду са U_0 . Ова вриједност се бира тако да буде једнака вриједности реалног потенцијала на геоиду W_0 . Нормална потенцијална функција $U(x,y,z)$ у потпуности је одређена (Heiskanen, Moritz, 2000):

- обликом обртног елипсоида, тј. његовим полуосама и;

- укупном масом M ;

- угаоном брзином ω .

Нека је дат геоид као еквипотенцијална површ реалног поља силе Земљине теже с вриједношћу реалног потенцијала W_0 , и нивоски елипсоид као еквипотенцијална површ нормалног убрзања силе теже с вриједношћу нормалног потенцијала $U_0=W_0$. У произвољној тачки геоида P_0 вектор реалног убрзања силе

- Minor axis of oblate ellipsoid must coincide with the Earth's mean rotational axis, and it is considered that ellipsoid is rotating around its minor axis with the same angular speed as Earth's;

- Volume of the oblate ellipsoid should be equal to the volume of the Earth - this criterion is met if the ellipsoid represents the best approximation of the geoid in terms of the method of least squares;

- The mass of the oblate ellipsoid should be equal to the mass of the Earth, including the atmosphere, and mass density distribution inside the ellipsoid is regular.

Oblate ellipsoid that meets the above requirements is called equipotential ellipsoid, and gravity field generated by this ellipsoid is called the normal gravity field. Although the Earth is not a real ellipsoid, ellipsoidal gravity field has a fundamental practical importance because it is easy to compute, and the deviations of the real gravity field from ellipsoidal normal gravity field are sufficiently small, so they can be considered as a linear. This separation of the Earth's gravity on a "normal" and left "disturbing" field greatly simplifies the problem of its determining. Due to the assumed regular mass density distribution inside the equipotential ellipsoid, its normal gravity field is also regular and can be mathematically described in a rather simple way. In addition, the surface of the equipotential ellipsoid is an equipotential surface of normal potential, which is denoted with U , and value on the ellipsoid itself with U_0 . This value is chosen to be equal to the value of the real potential on geoid W_0 . The function $U(x,y,z)$ of the normal potential is determined by a (Heiskanen, Moritz, 2000):

- shape of the oblate ellipsoid, i.e. its semi-axes and;

- the total mass M ;

- angular velocity ω .

Geoid is an equipotential surface of the real gravity field with the value of the real potential W_0 , and oblate ellipsoid is equipotential surface of normal gravity with the value of the normal potential $U_0=W_0$. At an arbitrary geoid point

теже износи. Одговарајућа пројекција тачке по нормали на елипсоид даје тачку у којој вектор нормалног убрзања силе теже износи . Сходно дефиницијама геоида и нивоског елипсоида за одговарајући реални и нормални потенцијал у дефинисаним тачкама вриједи (Одаловић, 2010):

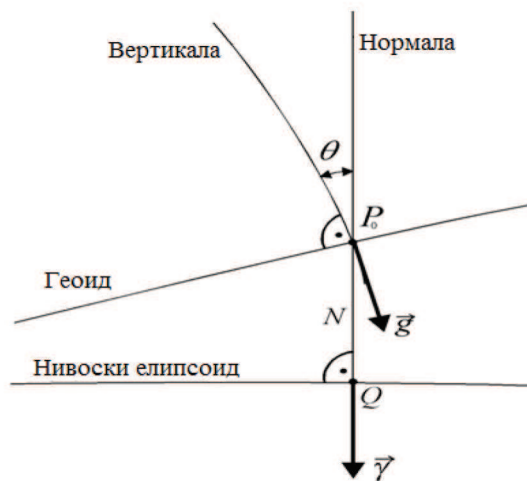
$$W_{P_0} = U_Q \quad (1)$$

Дужина, односно растојање између геоида и елипсоида, рачунато по нормали на елипсоид, назива се ундулацијом геоида или геоидном висином и означава се са , као што је приказано на слици 1 (Vaniček, Krakiwsky, 2005).

P_0 vector of real gravity is. The appropriate projection of point alongside the ellipsoidal plumb-line gives the point at which the vector of normal gravity is . According to the definitions of geoid and ellipsoid, for the corresponding real and normal potential in defined points, the equation is valid (Odalović, O., 2010):

$$W_{P_0} = U_Q \quad (1)$$

A segment , ie. the distance between the geoid and ellipsoid, calculated over ellipsoidal plumb-line is called the geoid undulation or geoidal height and is denoted by, as shown in Fig. 1 (Vaniček, Krakiwsky, 2005).



Сл. 1. Компоненте геоида
Fig. 1. Components of the geoid

Вектор реалног убрзања силе теже \vec{g} и нормалног убрзања силе теже $\vec{\gamma}$ међусобно се разликују како по интензитету тако и по правцу. Разлика у интензитетима је:

$$\Delta g = \vec{g} - \vec{\gamma}, \quad (2)$$

и назива се аномалијом силе теже, док је разлика у правцима угао који се назива отклоном вертикале или одступањем вертикале (Одаловић, 2010). Отклони вертикале веома су мали углови, реда величине неколико лучних секунди, што значи да се вертикале и нормале скоро поклапају. Ова претпоставка о поклапању вертикале и нормале долази до изражаја приликом трансформације висина из физичког

Vector of real gravity \vec{g} and vector of normal gravity $\vec{\gamma}$ differ from one another both in intensity and in direction. The difference in intensity is:

$$\Delta g = \vec{g} - \vec{\gamma}, \quad (2)$$

and it is called the gravity anomaly, while the difference in directions is angle, called the vertical deflection (Odalović, 2010). Vertical deflections are very small angles, that can reach the order of magnitude of several tens of arcseconds, which means that the true and ellipsoidal plumb-line almost coincide. This assumption about the coinciding of these two plumb-lines comes to the fore during the transformation of heights from

у елипсоидни систем висина и обратно. Иначе, отклони вертикале, иако мали по нумеричкој вриједности, имају велики концептуални значај у геонаукама и астрономији јер практично дефинишу нагиб геоида у односу на елипсоид. У ствари, отклони вертикале су основне компоненте геоида, заједно са ундулацијама које дефинишу његов положај у односу на елипсоид. Вриједност ундулације геоида у односу на општи геоцентрични елипсоид креће се у распону од око -100 m до +100 m (Vaniček, et al 2012).

Поремећајни (аномалијски) потенцијал у тачки се дефинише као разлика реалног и нормалног потенцијала (Hećimović, 2005, a):

$$T_p = W_p - U_p \quad (3)$$

Ундулација геоида, аномалија силе теже, и компоненте отклона вертикале представљају параметре који се могу извести из аномалијског потенцијала, те се између њих могу формулисати различите везе. У том смислу најзначајније једначине су Брунсова која доводи у везу поремећајни потенцијал и ундулацију геоида (Heiskanen, Moritz, 2000):

$$N = \frac{T_p}{\gamma_Q}, \quad (4)$$

а фундаментална једначина физичке геодезије која повезује мјерену вриједност аномалије силе теже с непознатим поремећајним потенцијалом T_p (ibidem):

$$\Delta g = -\frac{\partial T_p}{\partial h} + \frac{1}{\gamma_Q} \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_Q \cdot T_p. \quad (5)$$

МЕТОДЕ ОДРЕЂИВАЊА КОМПОНЕНТИ ГЕОИДА

Одређивање геоида подразумева одређивање његових компоненти, ундулација и отклона вертикала у односу на елипсоид унапријед задатог облика и величине. Пошто се на основу познатих ундулација могу израчунати и отклони вертикала, одредити геоид значи знати

physical to ellipsoidal system and vice versa. Vertical deflections, although small in numerical values, have great conceptual significance in geosciences and astronomy because virtually define the slope of the geoid relative to the ellipsoid. Therefore, vertical deflections are the basic components of the geoid, and together with the undulations define its position relative to the ellipsoid. The departures (undulations) of the geoid from the best fitting geocentric ellipsoid range approximately between -100 m and +100 m globally (Vaniček et al, 2012).

Disturbing (anomalous) gravity potential at point is defined as the difference between real and normal potential (Hećimović, 2005, a):

$$T_p = W_p - U_p \quad (3)$$

Geoid undulations, gravity anomalies and vertical deflections are parameters that can be derived from anomalous potential, and a variety of relations can be formulated between them. In this terms, the most important equations are Bruns formula, linking disturbing potential and geoid undulation (Heiskanen, Moritz, 2000):

$$N = \frac{T_p}{\gamma_Q}, \quad (4)$$

and the fundamental equation of physical geodesy, which connects the measured value of gravity anomaly with unknown value of disturbing gravity potential T_p (ibidem):

$$\Delta g = -\frac{\partial T_p}{\partial h} + \frac{1}{\gamma_Q} \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h} \right)_Q \cdot T_p. \quad (5)$$

METHODS FOR DETERMINING THE COMPONENTS OF THE GEOID

Geoid determination means the determination of its components, undulations and vertical deflection relative to the ellipsoid with given shape and size. Because vertical deflections can be calculated from known undulations, geoid determination actually

његову ундулацију у свакој тачки. Одређивање локалног геоида подразумева одређивање ундулација у одређеном броју тачака унутар подручја од интереса. Број и распоред тачака у којима се одређују ундулације дефинише резолуцију геоида. Методологија одређивања геоида зависи првенствено од података којима се располаже. С обзиром на поријекло коришћених података може се извршити основна подјела метода на терестричке и сателитске (Одаловић, 2010). Код терестричких метода могу се издвојити:

- астрогеодетски нивелман; и
- гравиметријска метода (метода примјене Стоксове једначине).

Сателитске методе дијеле се према природи прикупљених података на оне базиране на резултатима:

- алтиметријских опажања;
- градиометријских опажања;
- опажања путања сателита.

Поред наведених, постоје и такозване комбиноване методе које представљају комбинацију терестричких и сателитских метода. Управо ове методе имају најширу примјену приликом одређивања ундулације геоида. Разлог комбиновања метода лежи у несавршености како терестричких, тако и сателитских метода.

Ундулација N геоида може се представити у облику збира дуготаласне (дугопериодичне, глобалне), средњоталасне (средњопериодичне, регионалне) и краткоталасне (краткопериодичне, локалне) компоненте. Краткоталасне карактеристике су последица постојања топографских маса, те се одређују анализирањем утицаја истих на вриједности ундулације. За потребе рачунања поменутих утицаја у обзир се узимају изостатички модели, а топографске масе се том приликом дијеле на тијела правилног геометријског облика чији су гравитациони утицаји дефинисани једначинама затвореног облика (Shen, Han, 2012). За одређивање средњоталасне карактеристике најчешће се користи Стоксово рјешење (Merry, 2008). У том смислу, неопходно је располагати подацима гравиметријских мјерења одређеног

requires only undulations to be known in every point. Determination of local geoid means the determination of undulations in a number of points within the area of interest. The number and disposition of points in which undulations are determined, defines the resolution of the geoid. The methodology for geoid determination depends primarily on the available data. With regard to the origin of the used data, basic classification can be carried out on terrestrial and satellite methods (Odalović, 2010). Terrestrial methods are:

- astro-geodetic levelling; and
- gravimetric method (based on Stokes equation).

Satellite methods are classified according to the nature of the collected data, on those based on the results of:

- altimetric measurements;
- gradiometric measurements;
- observations of satellite orbits.

In addition to these, there are the so-called combined methods, which represent a combination of terrestrial and satellite methods. These methods are widely used in geoid determination, due to imperfections of terrestrial and satellite methods.

Geoid undulation can be represented as a sum of long-wave (global), medium-wave (regional) and short-wave (local) components. Short-wave characteristics are a consequence of the existence of topographic masses, and are determined by analyzing their impact on the value of the undulations. For the purpose of calculating these influences, isostatic models are used, and topographic masses are divided on regular geometric bodies, whose gravitational effects are defined by equations with closed-form solutions (Shen, Han, 2012). For the medium-wave components determination, Stokes solution is commonly used (Merry, 2008). In this regard, it is necessary to have gravity measurements data with certain quantity and quality. Implementation of the results of determining long-wave components provides global, "smooth" shape of the geoid, with relatively small changes in the regional

обима и квалитета. Имплементацијом резултата одређивања дуготаласних карактеристика добија се глобална, „глатка“ слика геоида, с релативном малим промјенама ундулације на регионалном, и нарочито на локалном нивоу. Дуготаласна карактеристика одређује се примјеном глобалних геопотенцијалних модела.

ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛ EGM2008

Глобални геопотенцијални модел, модел сферних функција, односно модел сферних хармоника, називи су за математички модел којег чине коефицијенти развоја потенцијала поља убрзања гравитационе силе Земље у ред сферних хармоника. Модел се добија рјешавањем проблема граничних вриједности гравитационог потенцијала за сферу. Примјеном геопотенцијалних модела могу се одредити дугопериодичне компоненте геоида и остали функционали (елементи) поља убрзања силе Земљине теже (поремећајни потенцијал, аномалије убрзања силе теже) у практично свакој тачки на Земљи. Ипак, квалитет модела је ограничавајући фактор његовог коришћења. Геопотенцијални модел представља дуготаласни, углачани модел поља убрзања силе теже и не садржи локалне, детаљне карактеристике поља. Коефицијенти се рачунају до одређеног реда и степена, а с већим редом и степеном развоја требала би се добити и већа тачност глобалног модела геоида. Међутим, максималан ред и степен развоја зависи од густине и спектралне резолуције коришћених података.

Поузданост глобалног геопотенцијалног модела није хомогена за цијелу Земљу, те зависи од густине и квалитета података коришћених за поједина подручја (Хећимовић, Башић, 2001). Подаци сателитске алтиметрије дају добре резултате приликом одређивања глобалног геоида на морским површинама. За рачунање на копненим подручјима више пажње поклања се гравиметријским терестричким подацима чији

undulations, and especially at the local level. Long-wave characteristics are determined by using the global geopotential models.

GLOBAL GEOPOTENTIAL MODEL EGM2008

Global geopotential model, the model of spherical functions, or spherical harmonics model - those are the names for the mathematical model, which consists of the coefficients of Earth's gravity potential progression (development) into spherical harmonics series. Model is obtained by solving the boundary-value problems of gravitational potential for a sphere. Applying the geopotential model, long-wave components of the geoid and other functionals (elements) of the Earth's gravity field (disturbing potential, gravity anomalies) can be determined, virtually at each point on Earth. However, the quality of the model is a limiting factor in its use. Geopotential model represents the long-wave smoothed model of gravity field and does not contain local, detailed features of the gravity field. The coefficients are calculated up to a certain order and degree, and with a greater order and degree of progression more accurate global geoid model should be obtained. However, the maximum order and degree of progression depends on the density and spectral resolution of used data.

Reliability of global geopotential model is not homogeneous for the entire Earth, and depends on the density and quality of the data used in specific areas (Hećimović, Bašić, 2001). Satellite altimetry data give good results when determining the global geoid at sea surfaces. For the calculation on the land area, more attention is paid to the terrestrial gravimetric data, the quality of which causes

квалитет условљава поузданост модела геоида.

Глобални геопотенцијални модели у основи се задају помоћу коефицијената сферно-хармонијских функција C и S (Хећимовић, 2005, а). Развој сферно-хармонијских функција у ред врши се до максималног степена n и максималног реда m , а њихове конкретне вриједности зависе од квалитета и дистрибуције података коришћених приликом моделовања. У неким моделима су, поред хармонијских коефицијената C и S , задате и одговарајуће вриједности стандардних одступања коефицијената, σ_c и σ_s .

Поремећајни потенцијал из глобалног геопотенцијалног модела рачуна се на основу израза (ibidem):

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (6)$$

при чему је:

- GM – геоцентрична гравитациона константа;
- λ, θ, r – сферне координате;
- n, m – степен и редразвоја геопотенцијалног модела;
- a – велика полуоса елипсоида;
- $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$ – нумерички коефицијенти модела засновани на подацима мјерења, а представљају разлику коефицијената потпуно нормализованих сферних хармоника реалног и нормалног поља убрзања силе теже;
- n_{\max} – максимални развој глобалног геопотенцијалног модела;
- γ – нормална вриједност убрзања силе теже; и
- $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ – нормиране Лежандрове сферне функције прве врсте.

Коефицијенти нижи од степена $n=2$ једнаки су нули и нису задати јер је претпостављено да су масе коришћеног елипсоида и Земље једнаке, те да се центар елипсоида поклапа с центром масе Земље. Стога се коефицијенти нижег степена развоја од $n=2$ називају датумским коефицијентима. На основу поремећајног потенцијала могу се одредити и остали

reliability of geoid model.

Global geopotential models are basically given by using the coefficients of the spherical-harmonic functions C and S (Hećimović, 2005, a). Development of spherical-harmonic functions into functional series is performed to the maximum degree n and maximum order m , and their actual values depend on the quality and distribution of the data used during modeling. In some models, besides the harmonic coefficients and , the appropriate values of standard deviations of coefficients σ_c and σ_s are also specified.

Disturbing potential from the global geopotential model is calculated on the basis of the equation (ibidem):

where:

- GM – geocentric gravitational constant;
- λ, θ, r – spherical coordinates;
- n, m – degree and order of geopotential model progression;
- a – semi-major axis of the ellipsoid;
- $\Delta \bar{C}_{nm}, \Delta \bar{S}_{nm}$ – numerical coefficients of the model based on the measurement data, and represent the difference between the coefficients of fully normalized spherical harmonics of real and normal gravity field;
- n_{\max} – the maximum development of the global geopotential model;
- γ – normal value of gravity; and
- $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ – normalized Legendres spherical functions of the first kind.

Coefficients lower than degree $n=2$ equal to zero and are not given because it is assumed that the masses of used ellipsoid and the Earth are equal, and that the center of the ellipsoid coincides with the Earth's center of mass. Therefore, these coefficients, with the degree of progression lower than $n=2$, are called datum coefficients. On the basis of disturbing potential, also other functionals of gravity field can be determined.

Based on the usage of Bruns formula,

функционали поља убрзања силе теже.

На основу Брунсове једначине добија се израз за рачунање ундулације геоида из глобалног геопотенцијалног модела (Хећимовић, Башић, 2001):

$$N = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{n_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta). \quad (7)$$

Модел EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008) је глобални геопотенцијални модел новијег датума, објављен 2008. године од стране U. S. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA). Као основа за развој модела коришћен је ITG-GRACE03S модел аномалијског поља убрзања силе Земљине теже и њему одговарајућа коваријациона матрица, добијена примјеном методе најмањих квадрата. Основни подаци за рачунање сферно-хармонијских коефицијената су аномалије убрзања силе теже, одређене на глобалном нивоу и дефинисане правилном мрежом (engl: grid) резолуције 5 x 5 лучних минута, што укупно представља око 9,3 милиона вриједности аномалија (Hirt, 2011). Грид је формиран на основу терестричких гравиметријских и алтиметријских мјерења, при чему су најзначајнији подаци континуираног опажања сателитске мисије GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) у периоду од 57 мјесеци. Ову мисију чине парови сателита на ниским орбитама чија одступања од заједничке путање пружају податке о пољу убрзања силе теже. У подручјима с мањом резолуцијом доступних података, гравиметријски подаци су процијењени и допуњени на основу топографије. Коефицијенти овог модела срачунати су до реда и степена 2 159 (око 4,7 милиона коефицијената), а постоји и додатна могућност за опционо кориштење коефицијената развијених до степена 2 190 (Odera, et al 2012). Пошто тачност с којом ће бити одређене дуготаласне компоненте геоида зависи од:

- квалитета опажачког материјала кориштеног при одређивању глобалног геопотенцијалног модела, односно од тачности са којом су одређени коефицијенти модела; и
- степена и реда модела,

the equation for computing geoid undulations from a global geopotential model is obtained (Hećimović, Bašić, 2001):

Model EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008) is a recent global geopotential model, published in 2008 by the U.S. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA). As a basis for the development of the model, ITG GRACE03S model of anomalic field of gravity acceleration was used, and its corresponding covariance matrix obtained by applying the method of least squares. Basic data for the calculation of spherical-harmonic coefficients are the gravity anomalies, determined globally and defined by regular grid with resolution of 5 x 5 arcmin, representing a total of approximately 9.3 millions of anomalies (Hirt, 2011). Grid is formed on the basis of terrestrial gravity and altimetry measurements, with the most important data from continuous observations of satellite mission GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) in the period of 57 months. This mission consists of pairs of satellites in low orbits, whose deviations from the common orbits provide informations about the gravity field. In areas with lower resolution of available data, the gravimetric data were evaluated and amended on the basis of topography. The coefficients of the model are calculated up to order and degree of 2159 (about 4.7 million coefficient), and there is an additional possibility for optional use of coefficients developed to the degree 2 190 (Odera, et al 2012). Since the accuracy of determined long-wave geoid components depends on:

- quality of measurements used in determining the global geopotential model, ie. the accuracy model coefficients; and
 - degree and order of the model,
- it can be concluded that, in the context of accuracy, the EGM2008 is significantly

може се констатовати да је EGM2008 у контексту тачности значајно унапријеђен у односу на претходне моделе (Хећимовић, Башић, 2001; Pavlis, et al 2008).

Ундулације геоида срачунате примјеном модела EGM2008 односе се на геоцентрични елипсоид система WGS84, који је задан параметрима (Одаловић, 2010):

- $a = 6378137 \text{ m}$;
- $f = 1/298.257223563$;
- $GM = 3.986004418 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$;
- $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$.

Сателитске мисије CHAMP (Challenging Minisatellite Payload), GRACE и GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) дефинишу нове стандарде у моделовању глобалних геопотенцијалних модела. Очекује се да геопотенцијални модели у скоријој будућности омогуће одређивање глобалног геоида са стандардном центиметарском тачношћу (Triarahmadhana, Heliani, 2014).

ПРАКТИЧНО РАЧУНАЊЕ

Практични дио рада подразумијева одређивање дугопериодичних компоненти геоида на подручју Републике Српске, тачније Бања Луке и околине. Рачунање ундулација геоида извршено је за шире подручје такозване Бањалучке Крајине, односно простор сјеверозападног дијела Републике Српске. Посматрано подручје је четвороугаоног облика, оивичено тачкама А, В, С и Д. Тачка А налази се на територији Општине Рибник, тачка В на подручју Општине Завидовићи, тачка С је на територији Општине Брод, а Д на територији Општине Нови Град. Приказ распореда тачака дат је на слици 2, а геодетске координате тачака дате су у табели 1.

improved in comparison to previous models (Hećimović, Bašić, 2001; Pavlis, et al, 2008).

Geoid undulations computed by applying the model EGM2008 refer to the geocentric ellipsoid of system WGS84, which is defined with parameters:

- $a = 6378137 \text{ m}$;
- $f = 1/298.257223563$;
- $GM = 3.986004418 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$;
- $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad/s}$.

Satellite missions CHAMP (Challenging Minisatellite Payload), GRACE and GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) define a new standards in global geopotential models modeling. It is expected that in the near future, geopotential models should enable the determination of the global geoid with standard centimeter accuracy (Triarahmadhana, Heliani, 2014).

PRACTICAL COMPUTATION

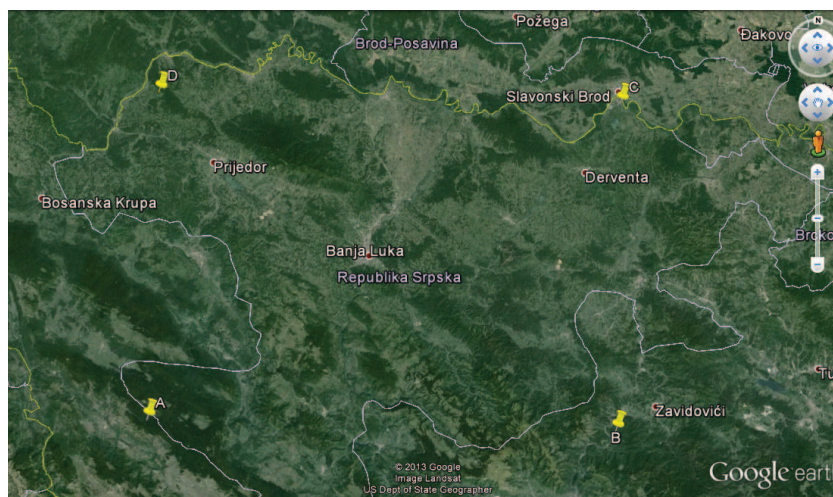
Practical part of the research is the determination of long-wave geoid components in the Republic of Srpska, namely the city of Banja Luka and its adjacency. Computation of geoid undulations has been done for the wider area of so-called Banja Luka Krajina, or the northwestern part of the Republic of Srpska. Analyzed area has a rectangular shape, edged with points A, B, C and D. Point A is located in the municipality of Ribnik, point B in the municipality Zavidovići, point C is in the municipality of Brod, a D in the municipality of Novi Grad. Display of points disposition is shown in Figure 2, and geodetic coordinates of the points are given in Table 1.

Таб. 1. Координате граничних тачака посматраног подручја
 Tab. 1. Coordinates of border points of the analyzed area

Тачка	$\varphi [^{\circ} ' '']$			$\lambda [^{\circ} ' '']$		
A	44	23	00	16	31	00
B	44	23	00	18	01	00
C	45	08	00	18	01	00
D	45	08	00	16	31	00

На основу приказаних координата граничних тачака видљиво је да посматрано подручје заузима $0^{\circ},75$ по ширини и $1^{\circ},5$ по дужини, што представља површину од око 9 905 km². Због добијања што боље подлоге за интерполацију у смислу густине одређених ундулација, подручје од интереса правилним гридом подијељено је на секције димензија $1',5 \times 1',5$. На тај начин по ширини је добијена 31 тачка, а по дужини 61 тачка, што укупно представља 1 891 тачку у којима су срачунате ундулације. Просјечно растојање између тачака износи 2,72 km.

Based on these coordinates of border points, it is evident that the observed area occupies $0^{\circ},75$ in latitude and $1^{\circ},5$ in longitude, which represents an area of approximately 9 905 km². For the sake of getting a better base for interpolation in terms of density of determined undulation, a regular grid was used for the division of observed area into sections with dimensions $1',5 \times 1',5$. In this way, 31 point in latitude is obtained, and 61 point in longitude, which represents a total of 1 891 points at which the undulations are calculated. Average distance between two points is 2.72 km.



Сл. 2. Распоред граничних тачака подручја на којем су срачунате ундулације
 Fig. 2. Disposition of border point of observed area

За рачунање ундулација геоида у тачкама грида коришћен је софтвер глобалног геопотенцијалног модела EGM2008 базиран на програмском језику FORTRAN. Софтвер и потребни подаци преузети су са интернет странице: <http://earth-info.nga.mil/GandG/>

To compute geoid undulations in grid points, software of the global geopotential model EGM2008 was used. This software is based on the FORTRAN programming language. Software and necessary data were downloaded from the website: <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/>

wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html.

Поступак рачунања је следећи:

1. У исти фолдер потребно је смјестити програм EGM2008 Harmonic Synthesis Program (hsynth_WGS84.f), те документе који садрже коефицијенте потребне за рачунање, Spherical Harmonic Coefficients for Earth's Gravitational Potential – Tide Free System (EGM2008_to2190_TideFree.gz) и Correction Coefficients (Zeta-to-N_to2160_egm2008.gz);
2. Фајл са улазним подацима садржи геодетске координате тачака, и поређане у колоне и изражене децималним бројем у степенима, а формира се као Notepad документ који се затим сачува у виду документа имена INPUT са екстензијом DAT (дакле, у поље File Name се уписује INPUT.DAT) у истом фолдеру гдје су смјештени софтвер и коефицијенти. За тип документа (Save as Type) бира се опција All Files.
3. Двоструким кликом на икону програма hsynth_WGS84.f покреће се софтвер, односно почиње рачунање ундулација. Вријеме рачунања зависи од броја унесених података, тј. тачака. У конкретном примјеру, за рачунање 1 891 вриједности ундулација, програму је потребно око 10 минута. За све вријеме рачунања на монитору је активан прозор програма.
4. По завршетку обраде података програмски прозор се сам затвара, а у фолдеру се појављује фајл са излазним подацима, имена OUTPUT.DAT. У фајлу су координатама тачака придружене одговарајуће вриједности ундулација изражене у метрима. Излазни подаци су истог формата као и улазни, тј. документ се отвара у програму Notepad.

Описаним поступком рачунања дуготаласних компоненти геоида за сјеверозападни дио Републике Српске, добијене су вриједности ундулација за 1891 тачку, те су срачунате: максимална ундулација , минимална ундулација , распон, тј. разлика максималне и минималне вриједности ундулације , и просјечна ундулација . Резултати су приказани у табели 2.

gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html. The method of calculation is as follows:

1. It is necessary to put in the same folder program “EGM2008 Harmonic Synthesis Program” (hsynth_WGS84.f), and documents containing the coefficients needed for computing, “Spherical Harmonic Coefficients for Earth's Gravitational Potential - Tide Free System” (EGM2008_to2190_TideFree.gz) and “Correction Coefficients” (Zeta- to-N_to2160_egm2008.gz);
2. File with the input data contains geodetic coordinates of points, arranged in columns and expressed in degrees with decimal number; it is formed as a Notepad document, which is then stored in the form of document named INPUT with the extension DAT (ie., in the File Name field is entered INPUT .DAT) in the same folder where you have placed the software and coefficients. For the type of document (Save As Type) selects the option All Files.
3. Double-click on the program icon „hsynth_WGS84.f“ runs the software and starts the process of undulations computing. Computation time depends on the number of input data, ie. points. In this example, for the calculation of 1891 undulation values, the program needs about 10 minutes. During all computation time, the program window is active on the monitor.
4. Upon completion of the data processing, program window will be closed, and the file with the output data, named OUTPUT.DAT, appears in the folder. In the file, the coordinates of the points are now associated with the corresponding values of undulations in meters. Output formats are the same as the input, ie. document opens in Notepad.

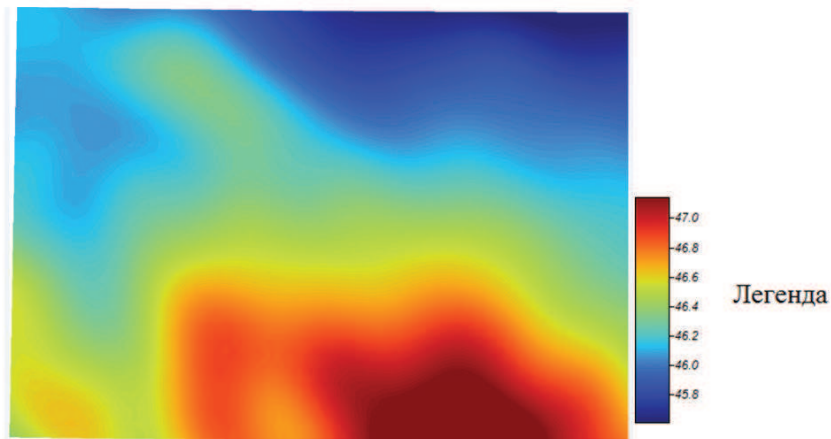
By using described method for calculation of long-wave geoid components, undulation values for 1 891 points in northwestern part of Republic of Srpska are obtained. These values are also determined: maximum undulation , minimum undulation , range, ie. difference between maximum and minimum values of the undulations , and average undulation . The results are shown in Table 2.

Таб. 2. Карактеристичне вриједности ундулација
Tab. 2. Characteristic values of undulation

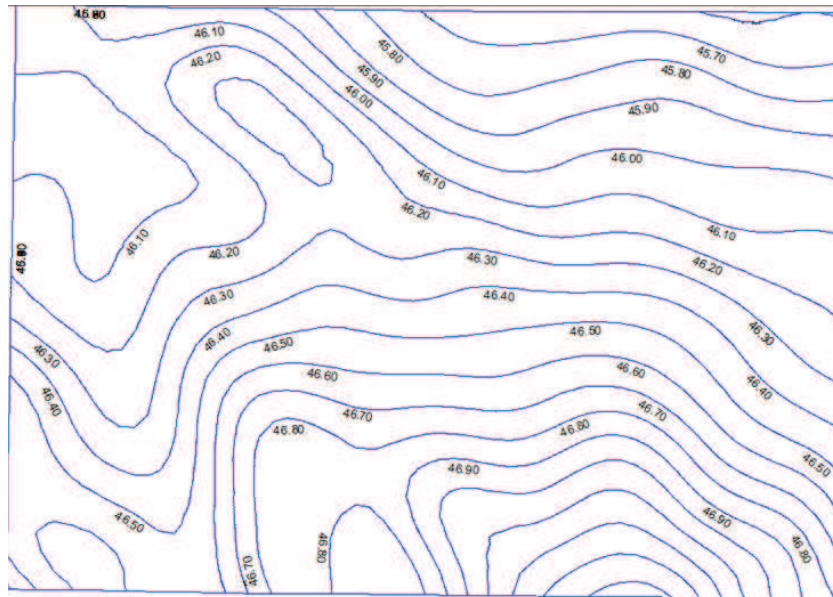
N_{\max} [m]	N_{\min} [m]	ΔN [m]	$\bar{N} =$ [m]
47.45	45.58	1.87	46.37

Тачка с максималном вриједношћу ундулације налази се у јужном дијелу посматраног подручја на планинском масиву Борја, а тачка с најмањом ундулацијом налази се на сјеверу, у Републици Хрватској (Бродско-посавска жупанија). Резултати рачунања обрађени су и у софтверу Saga GIS. Примјеном овог програмског пакета креиран је приказ континуалних ундулација на цијелом посматраном подручју. У основи овог одређивања је интерполација, а резултати су приказани у виду хипсометријске скале боја (слика 3) и изохипси (слика 4). Визуелни приказ пружа додатне информације о распореду ундулација, а генерални закључак је да су ундулације највеће у јужном и југоисточном планинском подручју, док се према сјеверу смањују.

Point with the maximum value of the undulation is located in the southern part of the observed area on the Borja mountain, and point with the smallest undulation value is located in the north, on the territory of the Republic of Croatia (Brod-Posavina county). Results of calculation are also processed in Saga GIS software. By applying this software, display of continuous undulation on the entire analyzed area is created. Interpolation is in the basis of this determination, and the results are shown as hypsometric color scale (Figure 3) and contour lines (Figure 4). The visual display provides additional information about the undulations disposition, and the general conclusion is that the undulations are highest in the southern and south-eastern mountainous area, while to the north are reducing.



Сл. 3. Ундулације геоида представљене хипсометријском скалом боја - легенда у [m]
Fig. 3. Geoid undulations represented by hypsometric color scale - a legend in [m]



Сл. 4. Ундулације геоида представљене изохипсама [m]
Fig. 4. Geoid undulations represented by isohyps [m]

Идентичним поступком одређене су ундулације за шире подручје града Бања Луке димензија 6,6 km x 5,6 km. Примјењен је нешто гушћи грид са укупно 589 тачака, а добијена је просјечна ундулација $\bar{N} = 46,37$ m и максимална промјена ундулације од 12 cm. Ови резултати потврђују тезу да ундулације на мањим територијама добијене из геопотенцијалних модела пружају само глобалну представу о положају геоида, те се морају допунити регионалном и локалном компонентом.

Using the identical procedure, undulations are also determined for the city of Banja Luka, covering an area of 6,6 km x 5,6 km. Slightly denser grid is applied with a total of 589 points, and the resulting average undulation is $\bar{N} = 46.37$ m, and a maximum change of the undulations is 12 cm. These results confirm the hypothesis that the undulations on the smaller territories obtained from geopotential models only provide a global illustration of the geoid position, and must be supplemented by regional and local component.

ЗАКЉУЧАК

Појам геоида као фундаменталне екипотенцијалне површи од великог је значаја у физичкој геодезији и геодезији уопште. Геоид се описује преко својих компоненти, ундулација и отклона вертикала у односу на елипсоид. Одредити геоид на неком подручју значи познавати његове компоненте у свакој тачки посматраног подручја. Основни математички апарат за његово одређивање је теорија потенцијала. Иако представља важан концепт већ готово два вијека, методе прецизног одређивања геоида развијене су тек у последњих неколико деценија.

CONCLUSION

The concept of the geoid as a fundamental equipotential surfaces is of great importance in physical geodesy and surveying in general. Geoid is described through its components, undulations and vertical deflections related to the ellipsoid. To determine the geoid in an area means knowing its components at any point in the observed area. Basic mathematical apparatus for its determination, is the potential theory. Although it represents an important concept for almost two centuries, the methods of precise geoid determination have been developed only in the last few decades.

As a functional of anomalic gravity field,

Ундулације геоида се, као функционал аномалијског поља убрзања силе Земљине теже, може представити као комбинација дуготаласне, средњеталасне и краткоталасне компоненте. Дуготаласне или дугопериодичне компоненте одређују се примјеном глобалних геопотенцијалних модела. Ови модели у основи представљају коефицијенте сферно-хармонијског развоја функција потенцијала гравитационе силе Земљине теже. Примјеном геопотенцијалних модела добија се такозвани углачани модел геоида тачности неколико дециметара. Очекује се да ће напредак технологије, у првом реду нове сателитске мисије, допринијети развоју глобалних модела који ће омогућити рачунање дугопериодичних компоненти геоида с центиметарском тачношћу.

Примјеном софтвера глобалног геопотенцијалног модела EGM2008 срачунате су дугопериодичне компоненте геоида на подручју Бања Луке и сјеверозападног дијела Републике Српске. При том је добијена просјечна вриједност ундулације од око 46 m, са тенденцијом смањивања од југа према сјеверу. Како би се на подручју Републике Српске одредио геоид високе резолуције, потребно је на основу обрађених резултата гравиметријских мјерења и примјеном дигиталних модела терена поправити резултате добијене из геопотенцијалног модела за средњоталасну и краткоталасну компоненту.

the geoid undulation can be represented as a combination of the long-wave, medium-wave and short-wave components. Long-wave components are determined by using the global geopotential models. These models essentially represent spherical-harmonic coefficients of the Earth's gravity potential function development. Applying geopotential models, so-called smoothed geoid model is obtained, with accuracy of a few decimeters. It is expected that the advance of technology, primarily the new satellite missions, will contribute to the development of global models that will enable the calculation of long-wave geoid components with centimeter accuracy.

Applying global geopotential model EGM2008 software, long-wave geoid components in the area of Banja Luka and the northwestern part of the Republic of Srpska are calculated. It is obtained the average value of undulation of about 46 m, with a tendency to decrease from south to north. To determine a high resolution geoid on the territory of Republic of Srpska, it is necessary to improve the results obtained from geopotential model with short-wave and medium-wave components by using digital terrain models and processing the results of gravimetric measurements.

ЛИТЕРАТУРА/BIBLIOGRAPHY:

Vaniček, P., Krakiwsky, E. (2005). Геодезија, концепти – *Геодетски журнал*. Београд: Савез геодета Србије

Vaniček, P., Kingdon, R., Santos, M. (2012). Geoid versus quasigeoid: a case of physics versus geometry. *Contributions to Geophysics and Geodesy, Vol. 42/1*, pp. 101–117

Делчев, С. (2009). *Геодетске референтне мреже – збирка решених задатака*. Београд: Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Merry, C. (2008). *GPS and the geoid. Position IT*. Cape Town: University of Cape Town

Одаловић, О. (2010). *Физичка геодезија*. Београд: Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Odera, P., A., Fukuda, Y., Kuroishi, Y. (2012). A high-resolution gravimetric geoid model for Japan from EGM2008 and local gravity data. *Earth Planet Space, Vol. 64*, pp. 361-368

Pavlis, N., Holmes, S., Kenyon, S., Factor, J. (2008). *The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)*. National Geospatial-Intelligence Agency

Shen, W., Han, J. (2012). *Global geoid modeling and evaluation. Geodetic sciences – observations, modeling and applications, Chapter 10*, pp. 329-344

Triarahmadhana, B., Heliani, L. S. (2014). *Evaluation of GOCE's global geopotential model to the accuration of local geoid. FIG Congress*

Хећимовић, Ж. (2005а). *Рачунање елемената поља убрзања силе теже примјеном глобалног геопотенцијалног модела*. Загреб: Геодетски факултет, Свеучилиште у Загребу

Хећимовић, Ж. (2005б). *Рачунање утјечаја топографије на величине за моделирање геоида*. Загреб: Геодетски факултет, Свеучилиште у Загребу

Хећимовић, Ж., Башић, Т. (2001). *Глобални геопотенцијални модели на територију Хрватске*. Загреб: Геодетски факултет, Свеучилиште у Загребу

Heiskanen, W., Moritz, H. (2000). *Физичка геодезија*. Београд: Институт за геодезију Грађевински факултет Универзитета у Београду

Hirt, C. (2011). Assessment of EGM2008 over Germany using accurate quasigeoid heights from vertical deflections, GCG05 and GPS/leveling. *Zeitschrift fuer Geodaesie, Geoinformation und Landmanagement, Vol. 136(3)*, pp. 138-149

Yang, H., Vaniček, P., Santos, M., Tenzer, R. (2004). An introduction to the Stokes-Helmert's method for precise geoid determination. *GEOIDE sixth annual scientific conference*. Gatineau, QC