ГЛАСНИК ГЕОГРАФСКОГ ДРУШТВА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ
HERALD OF THE GEOGRAPHIC SOCIETY OF THE REPUBLIC OF SRPSKA

ГОДИНА 2005. Свеска 9
YEAR 2005. Volume 9

UDK: 910.1:514.116

Стручни рад
Мр Александра Петрашевић

ДИРЕКТНА ПРИМЈЕНА СФЕРНОГ ТРОУГЛА У ГЕОГРАФИЈИ

Извод: У раду су приказане везе између сферне тригонометрије и географије. Могућност и примјену сферног троугла при израчунавању математичких географских координата и одређивања удаљености између два мјеста на Земљи.
Кључне ријечи: сферна тригонометрија, сферни троугао, ортодрома, локсодрома

Abstrakt: The work introduces connection between spherical trigonometry and geography. The possibility and application of spherical triangle in calculating of mathematical and geographical coordinates and determining distance between two locations on the planet Earth.
Key words: spherical trigonometry, spherical triangle, ortodrom, loksodrom.

Увод

У многим подручјима науке и технике сферна тригонометрија, као примјењена техничка и научна дисциплина, долази до изражаја. То су подручја стереометрије, наутике, математичке географије, геодезије, астрономије, науке о космосу и слично. Сферна тригонометрија, односно сферни троугао има директну (непосредну) и индиректну (посредну) примјену у географској науци. Кроз математичку географију примјењује се директно, а индиректна примјена се огледа кроз науке које су у чврстој вези са географијом, као што су астрономија, наука о космосу и сл.

Основни појмови у сферној тригонометрији

Дио тригонометрије који се бави рјешавањем сферних углова тј. троуглова који настају на површини лопте пресјеком три главна лоптина круга, зове се сферна тригонометрија. Сам назив потиче од грчких ријечи triginon – троугао, metron – мјерити и sfaira – сфера, што значи мјерење троуглова на сфери. Тај назив је добила по томе што је њен првобитни задатак био да се рачунским путем дође до непознатих елемената троугла.

Претече тригонометрије и то сферне су Вавилонци и Египћани. Први радови на пољу ове науке показују да је она настала због њене примјене у астрономији, уједно то је и један од разлога зашто је сферна тригонометрија много прије усавршена него равна тригонометрија. Још од Вавилонаца потиче подјела времена и углова на бази броја 60 (тзв. сексагезимална подјела).

Стварање првих радова, односно прве покушаје прерачунавања у тригонометрији извршио је Хипарх (161.г.п.н.е.). Једно од првих најоригиналнијих дјела из ове области су три књиге од Манелеја (98.г.н.е.) под насловом "Науке о лопти". Велике заслуге у овој области придају се К.Птоломеју (II в.н.е.), Ј.Милеру (XI в.н.е.), Н.Копернику (XVI в.н.е.), Гаусу (XIX в.н.е.) и другима. За основне обрасце и формуле које се и данас користе најзаслужнији је Л.Ојлер (XVIII в.н.е.).

Сферна тригонометрија се у географији изучава у посебном дијелу математичке географије, односно при оријентацији на небу и оријентацији на Земљи. Основни задатак сферне тригонометрије у географији је да пружи главне податке о примјени сферног троугла.

Циљ јој је да путем систематизованог и јасног излагања омогући географу правилну представу о вези између небеске и Земљине сфере и могућност примјене сферног троугла. На овај начин задатак сферне тригонометрије у географији је дидактичан, а циљ јој је педагошки. Да би се остварио горе наведени задатак користе се резултати појединих наука као што су астрономија, физика, математика, картографија и др. При излагању резултата наведених наука мора се користити методама које и те науке употребљавају у својим проучавањима. То је у првом реду математичка метода која својим симболима и бројевима даје јаснију слику и тачнију тврдњу појава, те практична и експериментална провјеравања теоретских резултата.

Математичкој географији, односно сферној тригонометрији не даје се оно мјесто које јој припада у географској науци.

Сфером (грч. sfaira – кугла) називамо геометријско тијело које настаје ротацијом (лат. rotatio – обртање) полукруга око његовог пречника. Приликом те ротације све тачке су на истој удаљености од средишта полукруга и ту удаљеност називамо полупречником. Краће речено, сфера је геометријско мјесто тачака у простору једнако удаљених од одређене тачке која се назива центар или средиште сфере. Основни сферни појмови као што су пречник, полупречник, тетива, центар, означавају исте појмове као и на кругу (чије су карактеристике већ добро познате).

Под појмом **Земљина сфера** подразумијева се Земљина кугла, чији је полупречник R = 6370 км , а положај мјеста одређен географским координатама: географском ширином φ_X ($-90° \le \varphi_X \le 90°$), географском дужином λ_X ($-180° \le \lambda_X \le 180°$) и азимутом (хоризонтални угао који заклапа сјеверни правац меридијана са стајне тачке и правац посматраног предмета, идући од сјевера у смјеру казаљке на сату $0° \le \alpha \le 360°$). Сваком посматрачу са Земљине површине чини се да се налази у центру бесконачног небеског свода. Сва тијела која видимо без обзира које су величине изгледају подједнако удаљена од нас. За потребе астрометрије (грч. astron-звијезда, metron-мјера) и астрономије (грч. astron-звијезда, nomos-закон), уводи се појам небеске или свемирске кугле, односно **небеске сфере**. То је замишљена кугла чији је полупречник произвољан, а већи је од удаљености најудаљеније звијезде која се може видјети телескопом. Небеском сфером зовемо замишљену сферу произвољног полупречника, са средиштем у посматрачевом оку, било гдје да се он налази на Земљиној површини.

Између Земљине и небеске сфере постоји међусобна сличност; све главне тачке, линије и кругови на небеској сфери имају своје еквиваленте на површини Земљине сфере. Земљина кугла је умањена и на одређен полупречник сведена небеска кугла, односно небеска кугла је бесконачно повећана Земљина кугла. Ово преношење је могуће објаснити зато што се "Земљина кугла сматра као центар небеске сфере, а њена површина одговара унутрашњој страни те сфере" (1,105).

Мјере за углове и њихове међусобне везе

За мјерење у астрономији и математичкој географији употребљавају се разне јединице за мјерење углова, а могу се сврстати у четири основне групе:

1) При нумеричком раду употребљава се степен, односно 360-ти дио пуног угла. Степен се дијели на минуте ($1°=60'$), минуте на секунде ($1'=60''$), секунде на десетине, стотине...Ако се означи $X° \ Y' \ Z''$, треба одредити граничну вриједност за X, Y, Z, гдје је $X \in Q$ (било који цијели број), $Y \in N < 60$ (цијели број који је мањи од 60) , $Z \in R < 60$ (мјешовити број мањи од 60).
2) У математичким извођењима и основним формулама у астрономији се служи и другом јединицом, а то је радијан (добија се из дефиниције дужине кружног лука ($l = r\pi\alpha° / 180°$). Радијан се може дефинисати као лук круга чија је дужина једнака са полупречником, односно средишњи угао круга који лежи под таквим луком. Означава се са ρ (ро).

$$1\ \rho = 180°/\pi = 180°/\ 3{,}14 = 57°{,}295779... = 57°\ 17'\ 44''{,}806$$

3) Ротација Земље око њене осе омогућује да се за мјерење углова употријеби и вријеме (временски размак за које се изврши обрт – ротација). Трајање Земљине ротације, односно једног обрта износи 24 часа (1 дан). Сваки сат се дијели на 60 минута, једна минута на 60 секунди и др. Може се закључити да једној двадесетчетвртини (1/24) обрта одговара угао од једног часа.

   $1 / 24 \cdot 60 = 1 / 1440$-ини одговара угао од једне временске минуте,
   $1 / 24 \cdot 60 \cdot 60 = 1 / 8640$-том дијелу обрта одговара угао од једне временске секунде.
   Записује се: $X^{h}\ Y^{min}\ Z^{sek}$, гдје $X \in Q$ (било који цијели број),
   $Y \in N < 60$ (цијели број мањи од 60),
   $Z \in R < 60$ (мјешовити број мањи од 60).

4) У појединим дисциплинама као јединица за мјерење углова користи се град (400-ти дио пуног круга). Град се може подијелити на мање дијелове као што су десетине, стотине, хиљадите дијелове и др. У литератури се често употребљава следећа ознака $120^{G},1250$; што се чита 120 градијана и 1250 десетохиљадитих града. Правилна подјела града је следећа: за 100-ти дио града употребљава се назив центизимална мину-

та, а стоти дио центизималне минуте зове се центизимална секунда.* На основу ових објашњења угао $120^G,1250$ се може записати и на следећи начин $120^G\ 12'\ 50''$

При обради астрономског посматрања, у нумеричком раду па и у овом раду често се јавља потреба да се вриједност угла израженог у једној јединици прерачуна у другу јединицу. За ова прерачунавања постоје таблице, али показаћемо оне везе које се тичу проблема овог рада.**

Основна прерачунавања која се користе су:

а) прерачунавање сексагезималних у децималне дијелове степена и обрнуто;

б) прерачунавање угла израженог у степене и сексагезималним његовим дијеловима у обрте и децималне дијелове обрта и обрнуто;

в) прерачунавање угла израженог у степенима, минутама и секундама у радијане и његове дијелове и обрнуто;

г) прерачунавање угла израженог у степенима, минутама и секундама и њеним дијеловима у часове, минуте, секунде и њене дијелове и обрнуто;

Нешто детаљније ће бити објашњене ставке под а, б и г , јер су оне у непосредној вези са проблемом овог рада.

а) Прерачунавање сексагезималних у децималне дијелове степена и обрнуто

У оба случаја је степен јединица којом се изражава угао, а рад се своди на прерачунавање минута, секунди и дијелова секунди у десете, стоте, хиљадите дијелове степена и обрнуто. При самом прерачунавању сексагезималних у децималне дијелове степена, нпр. угла $X°\ Y'\ Z''$, треба знати

$Y' = Y \cdot (\ 1\ /\ 60\ )°$; тј. $Y' = Y \cdot 0°,016666...$

$Z'' = Z \cdot (\ 1\ /\ 60 \cdot 60\ )° = Z \cdot (\ 1\ /\ 3600\ )°$; тј. $Z'' = Z \cdot 0°,0002777...$

Правило: За ово прерачунавање минута, секунди и њених дијелова у децималне дијелове степена гласи: задати број минута треба да се помножи са 0,016666..., а број секунди и њених дијелова са бројем 0,00027777..., па та два производа сабрати и дописати као децимални дио степена задатог угла.

Најлакше ће се схватити ако се погледа следећи примјер: угао од $149°41'33'',41$ треба прерачунати у децималне дијелове степена

$41' = 41' \cdot 0,016666... = 0,683333$

$33'',41 = 33'',41 \cdot 0,00027777... = 0,009281$

$0,683333 + 0,009281 = 0,692614$, тј. $149°41'33'',41 =$ **149°,692614**

---

* за ознаке центизималне минуте и секунде користи се ознака сексазимале (лат.seksegesimus- шездесетни, подјела часа на 60 минута, минута на 60 секунди) минуте и секунде усмјерене с лијева надесно (‘),(“)

** В. В. Мишковић: Логаритамске и нумеричке таблице, друго допуњено издање, Београд, 1959.

За обруту радњу, тј. при прерачунавању угла задатог у децималном запису, у степене, минуте, секунде и њене дијелове, важи следеће **правило**: Задате дијелове степена помножити са 60, добијени производ представља мјешовити број, гдје цијели број представља тражене минуте, потом се преостали децимални број опет помножи са 60; у овом производу који је такође мјешовити број, цијели број представља тражене секунде и дијелове секунди задатог угла.

На истом примјеру ће се приказати и обрнута радња, ако је задат угао у децималном запису 149°,692614, треба га прерачунати у степене, минуте, секунде и њене дијелове:

$0{,}692614 \cdot 60 = 41',556840$
$0{,}556840 \cdot 60 = 33'',41$, тј. $149°,692614 =$ **$149°41'33'',41$**

б) Прерачунавање угла израженог у степенима и сексагезималних његових дијелова у обрте и децималне дијелове обрта и обрнуто.

За ово прерачунавање важно је знати:

$1° = 1 / 360$ -ти дио обрта = 0,00277777... обрта.
$1' = 1 / 360 \cdot 60 = 1 / 216000$-ти дио обрта = 0,000046296 ...обрта.
$1'' = 1 / 360 \cdot 60 \cdot 60 = 1 / 1296000$-ти дио обрта = 0,000000772...обрта.

Правило : Број степени датог угла, ако прелази 360 степени, подијели се са 360, па добијени количник представља број обрта. Преостали број степени помножи се са 0,0027777777... , број минута са 0,000046296, а број секунди са 0,000000772; затим се три производа саберу и као децимални дио дода се броју обрта.

Ипак, најлакше ће се схватити ако се ријеши један примјер :

Угао 549 ° 22′ 47″,29 прерачунати у обрте и децималне дијелове обрта.

$549° = 360° + 189° = 1° + (189 \cdot 0{,}00277777)° = 1°,525000$
$22' = 22 \cdot 0°,00046296 = 0°, 001019$
$47'',29 = 47{,}29 \cdot 0°,000000772 = 0°, 000036$
тј. $549 ° 22' 47'',29 =$ **$1°, 526055$**

За обрнуту радњу важи следеће **правило** : помножити дијелове обрта са 360 степени, добијени производ представља степене и децимале степена. Потребно је наведене децимале помножити са 60, да би добили минуте и децималне дијелове минуте; затим децималне дијелове минуте помножити са 60, да би се добиле секунде и њене децималне вриједности. На примјеру из претходног прерачунавања да угао од 1°, 526055 обрта прерачунамо у степене, минуте, секунде и дијелове секунде.

Према горе наведеном правилу биће:
$1° = 360°$
$0{,}526055 \cdot 360 = 189{,}379800$ 189°

$0{,}379800 \cdot 60 = 22{,}788$ $22'$
$0{,}788 \cdot 60 = 47{,}29$ $47'',29$
тј. $1°, 526055$ **= 549 ° 22′ 47″,29**

г) Прерачунавање угла израженог у степенима, минутама, секундама и њеним дијеловима и обрнуто

Прије прерачунавања да углу од 360 степени одговара 24 часа, затим једном степену одговарају 4 минуте
4 минуте [$24^h / 360 = 1^h / 15 = 60^{min} / 15 = 4$ min.]

$360° = 24^h$ $24^h = 360°$
$1° = 4$ min. односно $1^h = 15°$
$1' = 4$ sek $1^{min} = 15'$
$1'' = 1 / 15 = 0{,}0666\ldots$ $1^{sek} = 15''$

Према томе, може се обиљежити угао X° Y′ Z″ прерачунат у временске јединице који одговара $(X / 15)^h (Y / 15)^{min} (Z / 15)^{sek}$. Овако добијени резултати често нису цијели бројеви па се користи следећи начин за прерачунавање ових јединица :

$$(X / 15)^h = (P + p/15)^h = P^h + (p\ 4/60)^h = P^h + (4p)^{min}$$

$$(Y / 15)^{min} = (Q + q/15)^{min} = Q^{min} + (q\ 4/60)^{min} = Q^{min} + (4q)^{sek}$$

гдје су P, Q количници, а p, q остатак дијељења са 15, а то се може записати овако: $X = 15P + p$, $Y = 15Q + q$.

Правило: Задати број степени подијелити са 15, добијени количник (P), представља тражени број часова. Остатак (p) дијељења учетверостручен додаје се количнику (Q) , дијељења са 15 датог броја (Y) минута ; овај збир представља тражене временске минуте.

Број Z секунди датог угла подијели се са 15 и резултат дода учетверострученом остатку (q) дијељења са 15 броја Y минута датог угла. Добијени бројеви P, ($P < 24$) и $4p + Q$,
($4p + Q < 60$) су цијели бројеви, док је временски број ($4q + Z/15$) мјешовит и мањи од 60.

Примјер: Треба прерачунати угао 237°51′37″,62 у часове, минуте, секунде и њене дијелове . Означићемо X = 237°, Y = 51′, Z = 37″,62.

$X = 237/15 = 15 \cdot 15 + 12$ гдје је $P = 15$, $p = 12$,
$Y = 51/15 = 15 \cdot 3 + 6$ гдје је $Q = 3$, $q = 6$,
$Z/15 = 37{,}62/15 = 2{,}508$

Број минута добија се $4p + Q = 4 \cdot 12 + 3 = 48 + 3 = 51$
Број секунди добија се $4q + 7/15 = 4 \cdot 6 + 2{,}508 = 24 + 2{,}508 = 26{,}508$
Углу од 237°51′37″,62 одговара **15^h 51 ^{min} 26 ^{sek},508**

У обрнутом случају, може се закључити да углу од $\alpha^h\ \beta^{min}\ \gamma^{sek}$ одговара угао од $(15\alpha)°\ (15\ \beta\ )'\ (15\gamma\ )''$. Ако су добијени резултати $(15\ \beta)'$ и $(15\gamma)''$ већи од 60, онда их треба претварати у јединице нижег реда. У истом облику можемо оставити $(15\alpha)°$, јер број степени може бити и већи од 360, а бројеви $(\ 15\ \beta\ )'$ и $(\ 15\gamma\ )''$ дијеле се са 60 (или бројеве α и β подијелити са 4). Са K и L означавају се количници, а са k и l остаци тих дијељења ; из овога се може записати :

$\beta = 4K + k$ и $\gamma = 4L + l$, онда је:
$(\ 15\beta\ )' = (\ 60K\ )' + (\ 15k\ )' = K° + (\ 15k\ )'$
$(\ 15\gamma\ )'' = (\ 60\ L\ )'' + (\ 15\ l\ )'' = L' + (\ 15\ l\ )''$

Примјер: Треба прерачунати угао од $15^h\ 51\ ^{min}\ 26\ ^{sek},508$ у степене, минуте, секунде и њене дијелове : $\alpha = 15$, $\beta = 51$, $\gamma = 26{,}508$.

Прије свега мора се израчунати:

$\beta = 51/4 = 12 \cdot 4 + 3$ гдје је $K = 12$, $k = 3$
$\gamma = 26{,}508/4 = 6 \cdot 4 + 2{,}508$ гдје је $L = 6$, $l = 2{,}508$.

Из претходних рачуна може се добити коначан резултат:
за степене $15\alpha + K = 15 \cdot 15 + 12 = 225 + 12 = 237°$
за минуте $15k + L = 15 \cdot 3 + 6 = 45 + 6 = 51'$
за секунде $15\ l = 15 \cdot 2{,}508 = 37'',62$
= **237° 51′ 37″,62**

Напомена : При прерачунавању угла израженог у степенима, минутама, секундама и њеним дијеловима у часове, минуте, секунде и њене дијелове и обрнуто, постоји још један начин, који је много лакши и једноставнији. То ће се показати на истом примјеру.

Примјер : угао од 237° 51′ 37″,62 прерачунати у часове, минуте, секунде и њене дијелове.

$237° = 237\ /\ 15 = 15\ ^h$ (12 – остатак)
$51' = (12 \cdot 60) + 51 = 720 + 51 = 771\ /\ 15 = 51^{min}$ (6 – остатак)
$37'',62 = (6 \cdot 60) + 37{,}62 = 360 + 37{,}62 = 397{,}62\ /\ 15 = 26{,}508\ ^{sek}$
Углу од 237°51′37″,62 одговара **$15^h\ 51\ ^{min}\ 26\ ^{sek},508$**.

Примјер : У обрнутом случају да се угао од $15^h\ 51\ ^{min}\ 26\ ^{sek},508$ прерачуна у степене, минуте,секунде и њене дијелове.

$15^h = 15 \cdot 15 = 225\ °\quad 225°$
$51^{min} = 51 \cdot 15 = 765\ '/\ 60 = 12°\ (\ 45'\ )\ 12°\ 45'$
$26{,}508^{sek} = 26{,}508 \cdot 15 = 397\ '',62\ /\ 60 = 6'\ 37'',62\ 6'\ 37'',62$
Углу од $15^h\ 51\ ^{min}\ 26\ ^{sek},508$ одговара угао од **237° 51′ 37″,62**.

Примјена сферног троугла

Математичка географија као географска дисциплина повезује Земљину куглу са сферним троуглом. Могу се издвојити двије основне примјене сферног троугла; прва при израчунавању математичких географских координата, а друга примјена служи за одређивање удаљености два мјеста на Земљи.

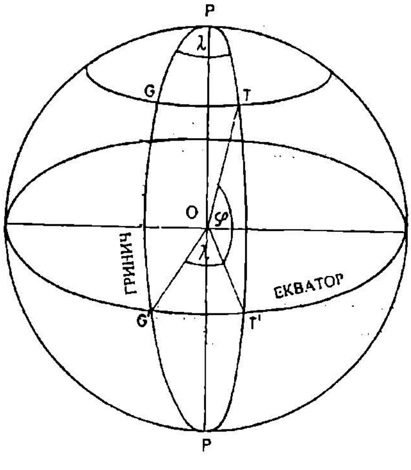
Математичке географске координате

Положај неког мјеста (тачке) на Земљи се одређује двијема географским координатама и то географском ширином (φ) и географском дужином (λ).* За одређивање положаја неког мјеста на Земљи користи се географски координатни систем представљен мрежом меридијана и паралела, гдје је апциса представљена највећом паралелом – екватором (замишљена кружна линија на Земљиној површини, чије су тачке подједнако удаљене од полова), а ордината је нормална на екватор и представљена је почетним меридијаном - Гриничем, (полукружне линије које спајају јужни и сјеверни пол).

Појмови географска ширина и географска дужина потичу још из старог вијека. Посматрајући неку зону на Земљи, говорило се о дужини те зоне у смјеру исток – запад и ширини сјевер – југ.

Географска ширина φ неке тачке на Земљи је дио лука меридијанског круга од екватора до те тачке $\varphi = TT_1$, а може се дефинисати и као угао између равни екватора и правца са средиштем Земље до те тачке $\varphi = TOT_1$ (слика 1.). Географска ширина се изражава у угловним степенима, минутама и секундама од 0° до ± 90°.

Географска дужина λ неког мјеста на Земљи је дио лука екваторијалног круга од почетног меридијана до меридијана те тачке $\lambda = GT_1$, односно, географска дужина λ је угао између равни почетног меридијана и равни меридијана те тачке $\lambda = GOT_1$ (слика 1.). Изражава се као географска ширина у угловним степенима, минутама и секундама од 0° до ± 180°. Источна географска дужина и сјеверна географска ширина означавају се позитивним предзнаком (+), а западна географска дужина и јужна географска ширина са негативним предзнаком (–). У литератури која се бави овим или сличним проблемом, умјесто појма географске ширине употребљава се њен комплемент, тј. удаљеност од полова ($a + \varphi$).



Слика 1. (1, 106)

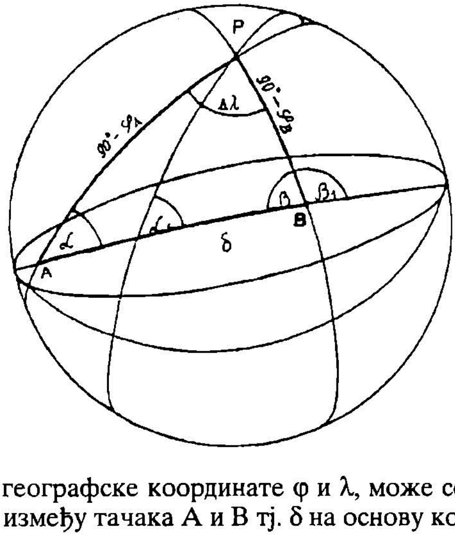
* Због специфичности рељефа на Земљи, са свим узвишењима и удубљењима, за положај неког мјеста нису довољне ове две координате, него се уводи и трећа координата којом би се одредио положај на основу његове висине, а ту трећу координату би представљала наднорска висина – h.

Одређивање удаљености између два мјеста на Земљи

Када су познате географска ширина и географска дужина, може се израчунати лучна удаљеност неког мјеста од екватора у јединицама за дужину. Треба водити рачуна о најкраћој удаљености између два мјеста на Земљи. Оно је најкраће ако се креће по главном кругу и такав правац кретања зове се **ортодромски** (грч. ortos – прав и dromos – пут). Ако се креће правцем тако да правац кретања сјече меридијане под истим углом (азимутом),онда се такав правац назива **локсодромски** (грч. loksos – крив и dromos – пут). Назив ортодрома и локсодрома први у литературу је увео Снелијус 1624. године, а 1605. године се у Њемачкој спомињу називи "равни" и "коси" правци пловидбе. (2 , 55).

Удаљеност између два мјеста на Земљи А и В (слика 2.) одређена је дужином лука великог круга између та два мјеста. То је уједно и најкраће растојање.

Угао између меридијана тачке А и ортодроме представља азимут ортодроме у тачки А (α), а угао између меридијана тачке В и ортодроме, представља азимут ортодроме у тачки В (β), при чему је $\beta = 180° - \beta_1$. Ортодрома све меридијане између тачака А и В сијече под различитим угловима. У случају кад је азимут ортодроме 0° и 180°, тада се не сијече ни један меридијан, јер је ортодрома меридијан. Ортодрома са дијеловима меридијана између тачака А и Р и В и Р, образује сферни троугао АРВ са страницама: АР = $90° - \varphi_A$, ВР = $90° - \varphi_B$ и δ, и угловима: α, β и $\Delta\lambda$ (представља разлике географских дужина тачака А и В, $\lambda_1 - \lambda_2$).



Слика 2 (1, 96)

Ако су познате географске координате φ и λ, може се израчунати растојање по ортодроми између тачака А и В тј. δ на основу косинусног обрасца:

$$\cos\delta = \cos(90° - \varphi_A)\cdot\cos(90° - \varphi_B) + \sin(90° - \varphi_A)\cdot\sin(90° - \varphi_B)\cdot\cos\Delta\lambda$$
$$\cos\delta = \sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B \cdot \cos\Delta\lambda$$

Често се у литератури може примијетити и следећа формула:

$\cos\delta = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma,$

гдје се са a означава ($90° - \varphi_A$), са b ($90° - \varphi_B$), а са γ ($\lambda_1 - \lambda_2$) . Када се израчуна лук ортодроме δ, могу се израчунати и азимути α и β. По синусном обрасцу, за угао α важи:

$\sin\alpha / \sin\Delta\lambda = \sin(90° - \varphi_B) / \sin\delta$
$\sin\alpha / \sin\Delta\lambda = \cos\varphi_B / \sin\delta$
$\sin\alpha \cdot \sin\delta = \sin\Delta\lambda \cdot \cos\varphi_B$
$\sin\alpha = \sin\Delta\lambda \cdot \cos\varphi_B / \sin\delta,$

а за угаоβ важи: $\sin\beta / \sin\Delta\lambda = \sin(90° - \varphi_A) / \sin\delta$
$\sin\beta = \sin\Delta\lambda \cdot \cos\varphi_A / \sin\delta.$

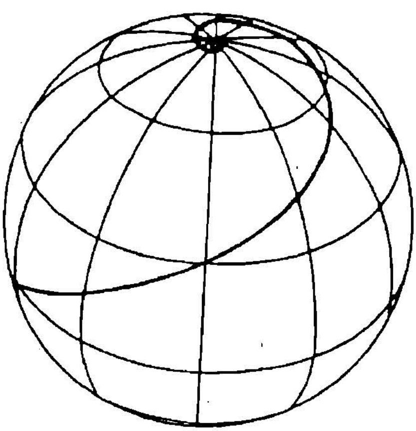
До азимута се може доћи и без познавања удаљености δ и то на основу следећих формула:

$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\Delta\lambda \cdot \cos N / \sin(\varphi_A - N)$, гдје је $\mathrm{tg}\,N = \mathrm{tg}\,\varphi_B / \cos\Delta\lambda$
$\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,\Delta\lambda \cdot \cos N_1 / \sin(\varphi_B - N_1)$, гдје је $\mathrm{tg}\,N = \mathrm{tg}\,\varphi_A / \cos\Delta\lambda$

Уопште, када се говори о удаљености двије тачке на Земљиној површини, у географији се говори о ортодромској удаљености.

Два мјеста на површини Земљине кугле могу се спојити са безброј кривуља. Једна од њих је најкраћа, а то је ортодрома. Друга карактеристична кривуља која није најкраћа, али сијече све меридијане под истим углом (азимутом) зове се **локсодрома**.

На Земљиној површини представљена је спиралном линијом која се постепено приближава полу, али га никад не достиже, јер се на полу пресјецају сви меридијани (слика 3.). Локсодромски правац је старији од ортодромског.* Код локсодроме се такође могу израчунати удаљеност S и азимут.



Слика 3. (1, 106)

$\mathrm{tg}\,\alpha = \Delta\lambda / \ln\mathrm{tg}[45° + (\varphi_A / 2)] - \ln\mathrm{tg}[45° + (\varphi_B / 2)],$
$S = \Delta\varphi / \cos\alpha,$

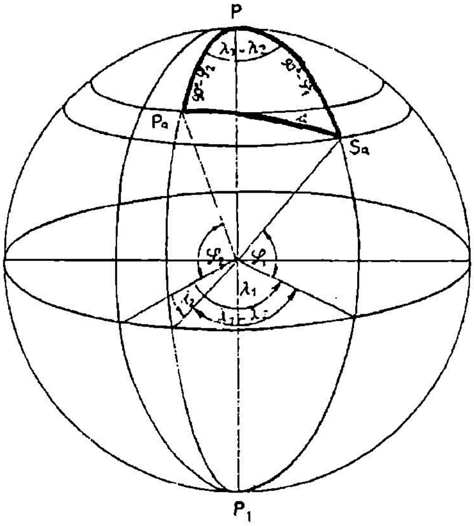
$\Delta\varphi$ и α се дају у угловним јединицама, а S се добија у дужинским јединицама.

Као и до сада, најлакша примјена формула из сферне тригонометрије може се приказати кроз примјере на неколико начина.

* На бродарским картама које су цртане у Меркарторовој пројекцији, меридијани и паралеле су приказане као равне линије. Било је довољно спојити два мјеста и утврдити углове под којим тај правац сијече меридијане и уједно би се добио правац којим треба пловити.

Примјер: Треба да се израчуна удаљеност (по ортодроми) између Сарајева ($\varphi = 43° 51' 33''$ и $\lambda = 18° 25' 44''$) и Париза ($\varphi = 48° 50' 47''$ и $\lambda = 2° 20' 49''$)?

На цртежу је графички представљена сферна удаљеност између Париза (Pa) и Сарајева (Sa), у сферном троуглу (P Pa Sa) познате су двије странице ($90° - \varphi_A$), ($90° - \varphi_B$) и угао између њих $\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B$ (слика 4.).



Слика 4. (1, 101)

$\cos d = \cos (90° - \varphi_A) \cdot \cos (90° - \varphi_B) + \sin (90° - \varphi_A) \cdot \sin (90° - \varphi_B) \cdot \cos \Delta\lambda$
$\cos d = \sin \varphi_A \cdot \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cdot \cos \varphi_B \cdot \cos \Delta\lambda$

$\varphi_A = 43° 51' 33''$ $\varphi_A = 43°,859167$ $\varphi_B = 48° 50' 47''$ $\varphi_B = 48°,846389$
$\lambda_A = 18° 25' 44''$ $\lambda_A = 18°,428889$ $\lambda_B = 2° 20' 49''$ $\lambda_B = 2°,346944$

$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B$
$\Delta\lambda = 18° 25' 44'' - 2° 20' 49''$
$\Delta\lambda = 16°04'55'' = 16°,081944$

$\cos d = 0,692888 \cdot 0,752948 + 0,721045 \cdot 0,65808 \cdot 0,960867$
$\cos d = 0,521714 + 0,45593$
$\cos d = 0,97764$
$d = 12°08'20''$

Дужина се добије у угловним степенима, минутама и секундама. Да би се добио коначан резултат, а знајући да је удаљеност d дио великог круга на Земљиној површини, онда је:

$12 \cdot 111111 = 1333332$
$8 \cdot 1852 = 14816$
$20 \cdot 31 = \underline{620}$
1348768 м = 1348,768 км

Овај задатак се може урадити и на следећи начин:

$\cos d = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$,
$a = 90° - \varphi_B$ $b = 90° - \varphi_A$ $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$
$a = 90° - 48° 50' 47''$ $b = 90° - 43°,859167$ $\gamma = 18° 25' 44'' - 2° 20' 49''$
$a = 41°09'13''$ $b = 46°08'27''$ $\gamma = 16°04'55'' = 16°,081944$
$a = 41°,15361$ $b = 46°,14083$ $\gamma = 16°,081944$

$\cos d = 0{,}75294 \cdot 0{,}69288 + 0{,}65808 \cdot 0{,}72104 \cdot 0{,}96086$
$\cos d = 0{,}52171 + 0{,}45593$
$\cos d = 0{,}97764$
$d = 0{,}211867 \text{ rad} = 12°08'20''$
$d = 0{,}211867 \cdot 6371$ км
$d = 1349{,}8046$ км

На основу ова два примјера може се видјети примјена сферног троугла при израчунавању удаљености између два мјеста на Земљи. Међутим, у сферном троуглу PPaSa могу се израчунати и азимути ортодроме.

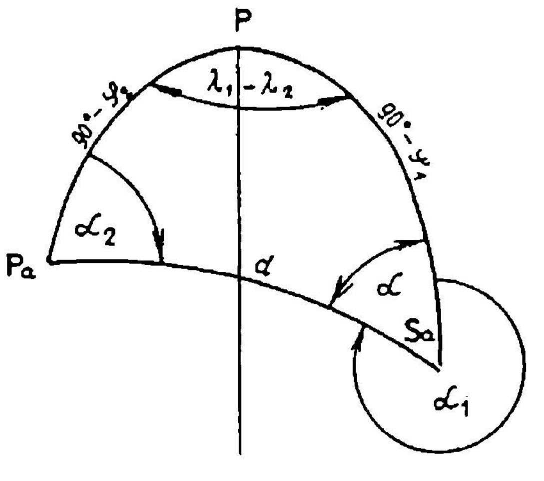
Примјер: Израчунати азимуте које ортодрома чини са меридијаном Сарајева и меридијаном Париза?

Задане су двије странице: $90° - \varphi_1$ и $90° - \varphi_2$ и угао $\Delta\lambda$. До азимута ортодроме α_1 и α_2 у тачкама Sa и Pa долази се помоћу Неперових једначина:

$\operatorname{tg} (\alpha + \alpha_2) / 2 = \{ [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) / 2] / [\sin (\varphi_1 + \varphi_2) / 2] \} \cdot \operatorname{ctg} (\Delta\lambda / 2)$
$\operatorname{tg} (\alpha - \alpha_2) / 2 = \{ [\sin (\varphi_1 - \varphi_2) / 2] / [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) / 2] \} \cdot \operatorname{ctg} (\Delta\lambda / 2)$

Величине α, α_2 и φ_1, φ_2 у овом случају мијењају мјесто јер је $\varphi_2 > \varphi_1$, па се према слици 5. и претходним формулама добије:

$\operatorname{tg} (\alpha_2 + \alpha) / 2 = \{ [\cos (\varphi_2 - \varphi_1) / 2] / [\sin (\varphi_2 + \varphi_1) / 2] \} \cdot \operatorname{ctg} (\Delta\lambda / 2)$
$\operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha) / 2 = \{ [\sin (\varphi_2 - \varphi_1) / 2] / [\cos (\varphi_2 + \varphi_1) / 2] \} \cdot \operatorname{ctg} (\Delta\lambda / 2)$



Слика 5. (1, 102)

$\varphi_1 = 43°51'33''$ $\varphi_2 = 48°50'47''$
$\lambda = 18°25'44''$ $\lambda = 02°20'43''$

$\varphi_2 - \varphi_1 = 48°50'47'' - 43°51'33''$ $\varphi_2 + \varphi_1 = 48°50'47'' + 43°51'33''$
$\varphi_2 - \varphi_1 = 4°59'14''$ $\varphi_2 + \varphi_1 = 92°42'20''$
$(\varphi_2 - \varphi_1) / 2 = 2°29'37''$ $(\varphi_2 + \varphi_1) / 2 = 46°21'10''$
$(\varphi_2 - \varphi_1) / 2 = 2°{,}493611$ $(\varphi_2 + \varphi_1) / 2 = 46°{,}352778$

$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$
$\Delta\lambda = 18°\ 25'\ 44'' - 2°\ 20'\ 49''$
$\Delta\lambda = 16°04'55''$
$\Delta\lambda / 2 = 8°25'27'',5$
$\Delta\lambda / 2 = 8°{,}040972$

$tg\ (\alpha_2 + \alpha) / 2 = [\cos 2°29'37'' / \sin 46°21'10''] \cdot ctg\ 8°2'27'',5$
$tg\ (\alpha_2 + \alpha) / 2 = (0{,}99905 / 0{,}69022) \cdot 7{,}078637$
$tg\ (\alpha_2 + \alpha) / 2 = 1{,}44744 \cdot 7{,}078637$
$tg\ (\alpha_2 + \alpha) / 2 = 10{,}24588$
$(\alpha_2 + \alpha) / 2 = 84°25'32''$
$(\alpha_2 + \alpha) = 84°25'32'' \cdot 2$
$\alpha_2 + \alpha = 168°51'04''$

$tg\ (\alpha_2 - \alpha) / 2 = [\sin 2°29'37'' / \cos 46°21'10''] \cdot ctg\ 8°02'\ 27'',5$
$tg\ (\alpha_2 - \alpha) / 2 = (0{,}04308 / 0{,}69022) \cdot 7{,}078637$
$tg\ (\alpha_2 - \alpha) / 2 = 0{,}06242 \cdot 7{,}078637$
$tg\ (\alpha_2 - \alpha) / 2 = 0{,}44181$
$(\alpha_2 - \alpha) / 2 = 23°50'11''$
$\alpha_2 - \alpha = 23°50'11'' \cdot 2$
$\alpha_2 - \alpha = 47°40'22''$

$\alpha_2 + \alpha = 168°51'04''$ $\alpha = \alpha_2 - 47°40'22''$
$\alpha_2 - \alpha = 47°40'22''$ $\alpha = 103°15'43'' - 47°40'22''$
$2\alpha_2 = 206°31'26'' / 2$ $\alpha = 55°35'21''$
$\alpha_2 = 103°15'43''$

Азимут ортодроме у тачки Sa према тачки Pa је $360° - \alpha =$ **304°24'39''**.

Закључак

На основу претходног текста, можемо закључити да примјена сферног троугла има вишеструки значај, како у настави географије тако и у практичној примјени. Кроз наставу географије, ако изузмемо високо школско образовање, сферни троугао се не примјењује онолико колико би требао. Сваки наставник географије на основу психо физичког узраста ученика може да кроз поједине наставне јединице примијени сферни троугао. Сферни троугао можемо примијенити при оријентацији на небеској сфери, при израчунавању дужине дана, као и корекције трајања дана и ноћи.

Ипак, његова највећа употреба је присутна у саобраћају, како у ваздухопловном тако и у поморском. Често се могу срести појмови пловидба по ортодроми или лет по ортодроми. То ништа друго није него најкраћа удаљеност између два мјеста на Земљи, која се добија из сферног троугла (проблем ортодроме).

Сферни троугао, као предмет проучавања сферне тригонометрије, која је дио математичке географије, као што смо видјели има велику примјену у географији, али му се не приписује оно мјесто које стварно заузима. Надам се да ће у скоријој будућности примјена сферног троугла, уз више овавких и сличних радова, пронаћи оно мјесто које заслужује у географији.

ЛИТЕРАТУРА:

Р. Гашпаревић: **Математичка географија**, Географско друштво СР Босни и Херцеговине, Сарајево, 1969.

Т. Канает: **Математичка географија**, Сарајево, 1963.

В. В. Мишковић: **Општа астрономија (сферна астрономија)**, Завод за издавање уџбеника, Народна Република Србија, Београд,1960.

З. Ханжек: **Сферна тригонометрија**, Техничка књига, Загреб, 1967.

М. Максимовић: **Обрасци равне и сферне тригонометрије и инфинтиземалног рачуна**, Минијатурна библиотека 133 – 136, Нови Сад, 1932.

Aleksandra Petrasevic

THE DIRECT APPLICATION OF SPHERICAL TRIANGLE IN GEOGRAPHY

Summary

On the basis of previous text, we may conclude that the application of spherical triangle has varied importance, both, in the teaching methods of geography and in practical usage. If we exclude higher education, the spherical triangle is not being sufficiently applied throughout teaching process in geography. Taking into consideration mental and psycho-physical development stage of students every teacher of geography may apply spherical triangle through certain teaching units (lessons). Spherical triangle may be applied in the celestial sphere orientation, in calculating of length of day, as well as the correction of day and night duration.

However, the most common usage of spherical triangle is in both, navigation and air traffic. It is very common to use terms such as navigation by ortodrom and flight by ortodrom. It is nothing else but shortest distance between two positions on the planet earth, which is being established by applying spherical triangle, ortodrom problem.

Spherical triangle, as a subject to research in spherical trigonometry, which is part of mathematical geography, has great usage in geography, but yet not up to the satisfactory extent considering the factual importance of it. Having more works, such as this one or similar, I hope that in the near future the usage of spherical triangle will find its appropriate place in geography.